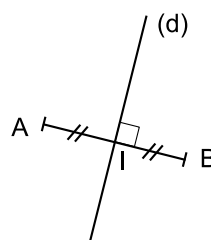


Chapitre 1

Droites remarquables

1.1 Médiatrices d'un triangle

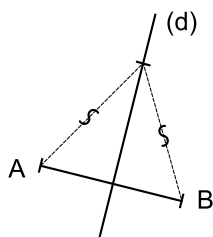
Définition. La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son milieu.



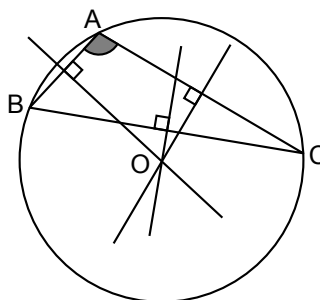
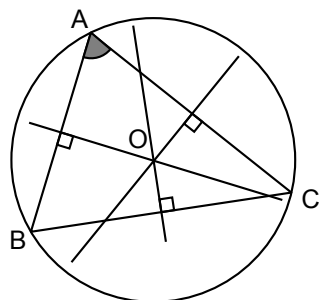
Propriétés.

P1 Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

P2 Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment.

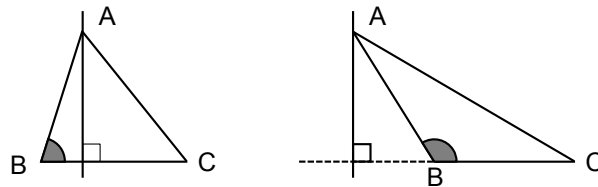


Propriété. Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Le point de concours est le centre du cercle circonscrit au triangle.

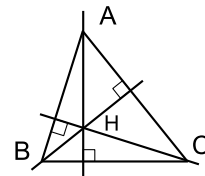


1.2 Hauteurs d'un triangle

Définition. Une **hauteur** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est **perpendiculaire** au côté opposé.

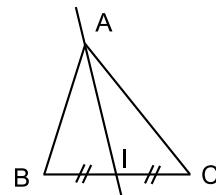


Propriété Dans tout triangle, les trois hauteurs sont concourantes. Le point de concours est l'**orthocentre** du triangle.

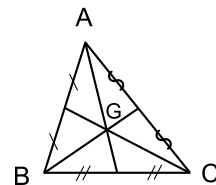


1.3 Médiannes d'un triangle

Définition. Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et **par le milieu** du côté opposé. On appelle également médiane le segment qui joint ce milieu avec ce sommet.



Propriétés. Une médiane partage son triangle en deux triangles de même longueur.
Dans tout triangle, les trois médianes sont concourantes.



Définition. Le point de concours est le **centre de gravité** du triangle.

Propriété. Dans un triangle, le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane.

1.4 Démonstrations

Concours des médiatrices. Dans le triangle ABC , la droite (a) est la médiatrice de $[BC]$, la droite (b) est la médiatrice de $[AC]$, M est le point d'intersection des droites (a) et (b) .

– Démontrons que $MB = MC$ et que $MA = MC$.

On sait que M est sur la médiatrice de $[BC]$,
on applique : “Si un point est sur la médiatrice
d’un segment alors il est équidistant des extrémités
de ce segment.”

donc $MB = MC$.

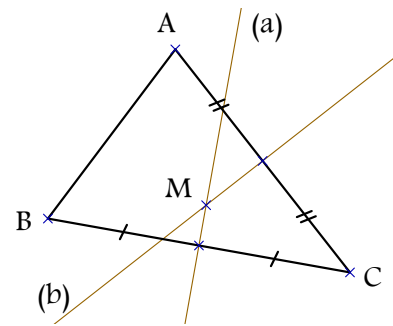
On montre de même que $MA = MC$. Par consé-
quent $MB = MC = MA$.

– Concluons que les médiatrices de ABC sont concourantes.

On a montré que $MB = MA$,

on applique : “si un point est équidistant des extrémités d’un segment alors il est sur
la médiatrice de ce segment.”

donc M est sur la médiatrice de $[AB]$ et les trois médiatrices sont concourantes.



Concours des hauteurs. Dans le triangle EFG , la droite (a) est la hauteur issue
de E , la droite (b) est la hauteur issue de F , la droite (c) est la hauteur issue de G .
On construit la parallèle (e) à (FG) passant par E , la parallèle (f) à (EG) passant
par F , la parallèle (g) à (EF) passant par G . Ces trois droites forment un triangle
 ABC .

– Démontrons que (a) est la médiatrice du segment $[BC]$.

On sait que $FGEB$ est un parallélo-
gramme [...] donc $FG = BE$. On montre
de même que $FG = EC$ or les points
 A, E, C sont alignés dans cet ordre, donc
 E est le milieu de $[BC]$.

On sait que $(FG) \perp (a)$ et que
 $(FG) \parallel (BC)$,

on applique : “si deux droites sont paral-
lèles à une même droite alors elles sont paral-
lèles entre elles”,

donc $(BC) \perp (a)$.

On a montré que E est le milieu de $[BC]$ et
que $(a) \perp (BC)$ donc (a) est la médiatrice
de $[BC]$.

On montre de même que (b) est la médiatrice de $[AC]$ et que (c) est la médiatrice
de $[AB]$.

– Concluons que les droites $(a), (b), (c)$ sont concourantes.

On a montré que les hauteurs $(a), (b), (c)$ du triangle EFG sont les médiatrices des
cotés du triangle ABC , or les médiatrices des cotés d’un triangle sont concourantes
donc les droites $(a), (b), (c)$ sont concourantes.

